

Dérivation et étude de fonctions

Dérivabilité · Fonctions réciproques · TAF · Étude de fonctions

Exercice 1

Soit $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$.

- 1) a) Déterminer D_f . b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$.
- 2) a) Dérivabilité à droite et à gauche en $x_0 = 1$. b) Dérivabilité à gauche en $x_1 = -2$.
- 3) a) Calculer $f'(x)$ sur $D_f \setminus \{-2; 1\}$. b) Tableau de variations.

Exercice 2

Soit $f(x) = \sqrt[3]{1 - \cos x}$ sur $]0; \pi[$.

- 1) Montrer que f est dérivable sur $]0; \pi[$.
- 2) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0; \pi[$.
- 3) Dérivabilité à droite en 0, interprétation graphique.

Exercice 3

Soit $f(x) = 1 + \frac{1}{\sin x}$ sur $I = \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right[$.

- 1) Montrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} sur J à déterminer.
- 2) Montrer que $(\forall x \in I); f'(x) = (f(x) - 1)\sqrt{(f(x))^2 - 2f(x)}$.
- 3) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]2; +\infty[$ et que $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2 - 2x}}$.

Exercice 4

Étudier la dérivabilité et calculer la dérivée des 8 fonctions suivantes :

- | | |
|---------------------------------------|------------------------------------|
| 1) $f(x) = (x-1)\sqrt{2x}$ | 5) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x} - x$ |
| 2) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x+2}$ | 6) $f(x) = (\sqrt[3]{x^2} - 1)^4$ |

3) $f(x) = \frac{2\sqrt[3]{x}}{1+x\sqrt{x}}$

7) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-2x}}$

4) $f(x) = x \cdot \sqrt[3]{1-\frac{2}{x}}$

8) $f(x) = x \cdot \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}}$

Exercice 5

Soit $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1$.

- 1) a) Calculer $f'(x)$. b) Montrer que f' réalise une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} et déduire $\exists! \alpha; f'(\alpha) = 0$. c) Tableau de variations.
- 2) a) Vérifier $f(x) = \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{8}\right) f'(x) + \left(3x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}\right)$. b) Montrer $f(\alpha) > 0$. c) Déduire $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) > 0$.

Exercice 6

Étudier la dérivabilité et calculer la dérivée :

1) $f(x) = x \cdot \arctan(\sqrt{x})$

3) $f(x) = \sqrt[3]{\arctan x}$

2) $f(x) = \frac{\arctan x}{\sqrt{x}}$

4) $f(x) = \arctan\left(\sqrt[3]{(x+2)^2}\right)$

Exercice 7

Calculer $f'(x)$ puis simplifier $f(x)$:

1) $f(x) = \arctan(\sqrt{1+x^2} - x)$

2) $f(x) = \arctan\left(\frac{2x+1}{2-x}\right)$

3) $f(x) = \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \arctan\left(\frac{2-x}{x\sqrt{3}}\right)$

4) $f(x) = \arctan\left(\frac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}\right)$

Exercice 8

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right) - \arctan\left(\frac{x}{1+x}\right)$$

- 1) a) Déterminer D_f . b) Calculer $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

- 2) a) Calculer $f'(x)$. b) Déduire l'expression de f sur $] -1; 0[$ et sur $] -\infty; -1[\cup] 0; +\infty[$.

Exercice 9

$$f(x) = 2x + \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) \text{ sur }] -1; 1[.$$

- 1) a) Bijection sur J . b) Calculer $f''(x)$.
 2) Avec $g = f^{-1}$: a) g deux fois dérivable. b) Calculer $f(1/2)$, $g'(2)$ et $g''(2)$.

Exercice 10

$$f(x) = x - \frac{1}{\arctan x} \text{ sur }]0; +\infty[.$$

- 1) Tableau de variations.
 2) Unique solution $\alpha \in]0; +\infty[$ avec $1 < \alpha < \sqrt{3}$.
 3) a) f^{-1} sur \mathbb{R} . b) f^{-1} dérivable. c) $(f^{-1})'(0) = \frac{1 + \alpha^2}{1 + 2\alpha^2}$.

Exercice 11

- 1) a) Montrer $-\frac{x^3}{3} \leq \arctan x - x \leq -\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$ pour $x \geq 0$. b) Déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^2} = 0$.
 2) Montrer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x/(x+1)) - x}{x^2} = -1$.

Exercice 12

f continue sur $[0; 1]$, dérivable sur $]0; 1[$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Montrer $(\exists c \in]0; 1[) ; 2c f'(c) = \sqrt{c}$.

Exercice 13

f continue sur $[0; 1]$, dérivable sur $]0; 1[$, $f(0) \neq f(1)$, $f'(x) \neq 0$. Montrer $(\exists! c \in]0; 1[) ; f(0) - f(1) = 2f(c)$.

Exercice 14

$a, b, c \in \mathbb{R}$ non tous nuls. Montrer que $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx - (a + b + c) = 0$ admet au moins une solution dans $]0; 1[$.

Exercice 15

1) a) Soit $0 \leq a < b$. Montrer $\frac{1}{1+b^2} < \frac{\arctan b - \arctan a}{b-a} < \frac{1}{1+a^2}$.

b) Dédire ($\forall x > 0$); $\frac{1}{1+x^2} < \frac{\arctan x}{x} < 1$.

2) a) $f(x) = \arctan(x)/x$ ($x \neq 0$), $f(0) = 1$: continuité et dérivabilité en 0.

b) $g(x) = (x-1)^x \arctan(1/x)$: branches infinies en $\pm\infty$.

Exercice 16

En utilisant le TAF, montrer :

1) ($\forall x < 0$); $\arctan x < \frac{x}{1+x^2}$

2) $\frac{1}{\cos^2 a} < \frac{\tan b - \tan a}{b-a} < \frac{1}{\cos^2 b}$ pour $0 < a < b < \pi/2$

3) ($\forall (x, y) \in [0; 10]^2$); $|x \cos x - y \cos y| \leq 11|x - y|$

4) $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{4 \cos^2 1} |x - y|$ où $f(t) = \frac{1}{4} \tan\left(\frac{1}{1+t}\right)$

5) $|g(x) - g(y)| < \frac{\sqrt{2}}{12} |x - y|$ où $g(t) = \arctan(\sqrt{t+2})$

Exercice 17

1) Énoncer le TAF.

2) Montrer $1 < \frac{\tan x}{x} < 1 + \tan^2 x$ pour $x \in]0; \pi/2[$ par le TAF.

Exercice 18

f continue sur $[0; +\infty[$, dérivable sur $]0; +\infty[$, $f(0) = 0$, f' décroissante.

1) Montrer ($\forall x > 0$); $f(x) \geq x f'(x)$.

2) Montrer que $g(x) = f(x)/x$ est décroissante.

Exercice 19

$f(x) = 2x + \sin x - \cos x$ sur $[0; \pi/4]$.

- 1) Montrer $\exists! \alpha \in]0; \pi/4[; f(\alpha) = \alpha$.
- 2) Montrer $|f'(x)| \leq 4$.
- 3) Montrer $\exists! \alpha \in [0; \pi/4]; |f(x) - \alpha| \leq \pi$.

Exercice 20

f continue sur $[0; 1]$, dérivable sur $]0; 1[$, $f(0) = 0$, $f(1) = 4$. Montrer $(\exists c \in]0; 1[); \sqrt[4]{c^3} \cdot f'(c) = 1$.

Exercice 21

$f(x) = 1 - x + \arctan x$.

- 1) a) Centre de symétrie $I(0; 1)$. b) Tableau de variations.
- 2) a) Bijectivité sur \mathbb{R} . b) Solution unique α avec $2 < \alpha < 5/2$.
- 3) a) Branches infinies. b) Courbe.
- 4) a) $(f^{-1})'(x)$ et relation. b) Existence de $c \in [\pi/4; 1]$.

Exercice 22

$f(x) = 1/\tan x$ sur $[\pi/4; \pi/2[$, $f(\pi/2) = 0$.

- 1) Dérivabilité sur $[\pi/4; \pi/2]$.
- 2) Montrer $-2 \leq f'(x) \leq -1$.
- 3) En déduire l'encadrement de $(1 - \tan x)/\tan x$.
- 4) a) Bijectivité sur $[0; 1]$. b) Expliciter $f^{-1}(x)$.

Exercice 23

- 1) Soit f, g continues sur $[a; b]$, dérivables sur $]a; b[$, $g' \neq 0$. a) Montrer $g(a) \neq g(b)$.
b) Montrer (via φ) : $\exists c \in]a; b[; \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

2) Calculer : a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3}$.

Exercice 24

f continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$, $f(a) = f(b) = 0$, $f'_+(a) = 0$. Montrer $(\exists c \in]a; b[); f'(c) = \frac{f(c)}{c - a}$.

Exercice 25

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. f continue sur $[0; 1]$, dérivable sur $]0; 1[$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Montrer $(\exists (a, b, c) \in (]0; 1[)^3); f'(a) \times f'(b) = \frac{1 - c^n}{1 - c} \cdot c^{n-1}$.

Exercice 26

f deux fois dérivable, $\exists a > 0; f''(x) \geq a$.

- 1) Montrer $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = \pm\infty$.
- 2) f' bijection de \mathbb{R} vers \mathbb{R} . On note g sa réciproque.
- 3) $h(x) = xg(x) - f(g(x))$: dérivabilité et calcul de $g'(x)$.

Exercice 27

f continue sur $[a; b]$, deux fois dérivable sur $]a; b[$, $f(a) = f(b) = 0$, $f''(x) \neq 0$. Montrer $(\forall x \in]a; b[); f(x) \neq 0$.

Exercice 28

f continue sur $[0; +\infty[$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(0)$. $F(x) = f(1/x - 1)$ sur $]0; 1]$, $F(0) = f(0)$.

- 1) Bijection de $\varphi : x \mapsto 1/x - 1$ de $]0; 1]$ sur $[0; +\infty[$.
- 2) a) F continue sur $[0; 1]$. b) F dérivable sur $]0; 1[$.
- 3) $(\exists c \in]0; +\infty[); f'(c) = 0$.
- 4) f deux fois dérivable $\Rightarrow c$ est unique.

Exercices de synthèse

Exercice 29

$$f(x) = x(\sqrt[3]{x} - 2)^2 \text{ sur } [0; +\infty[.$$

- 1) a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. b) Branche infinie en $+\infty$.
- 2) Dérivabilité à droite en 0.
- 3) $f'(x)$ et tableau de variations.
- 4) Tracer (\mathcal{C}) .

Exercice 30

$$f(x) = 1 + \cos(\pi x) \text{ sur } [0; 1].$$

- 1) a) Tableau de variations. b) Bijectivité sur $[0; 2]$.
- 2) $(f^{-1})'(x) = \frac{-1}{\pi\sqrt{2x - x^2}}$.
- 3) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f^{-1}(x)}{x - 2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^{-1}(x) - 1}{x}$.
- 4) $h(x) = f^{-1}(x) + f^{-1}(2 - x)$: montrer $h \equiv 1$ sur $[0; 2]$.

Exercice 31

$$f(x) = \arctan(2\sqrt{1-x}) + \pi/2.$$

- 1) a) D_f . b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- 2) Dérivabilité à gauche en 1.
- 3) $f'(x)$, tableau, courbe.

Exercice 32

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}.$$

- 1) Tableau, $f([1; 2]) \subset [1; 2]$, $|f'(x)| \leq 1/4$ sur $[1; +\infty[$, point fixe unique $\alpha \in]1; 2[$.
- 2) Suite (u_n) , $u_0 = 2$, $u_{n+1} = f(u_n)$: suites (x_n) et (y_n) adjacentes, $\lim x_n =$

$$\lim y_n = \alpha.$$

Exercice 33

I/ $f(x) = \arctan x + 2x - 1 : f' > 2$, bijectivité, point fixe unique $\alpha \in]0; 1[$, $f(x) > x$ pour $x > \alpha$.

II/ Suite (u_n) , $u_0 = a > \alpha$, $u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$: monotonie, TAF : $u_{n+1} - \alpha < \frac{1}{2}(u_n - \alpha)$, limite α .

Exercice 34

$$f(x) = x - \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}.$$

- 1) D_f , limites, branches infinies.
- 2) Dérivabilité à gauche en -1 .
- 3) f' , tableau, courbe.
- 4) Restriction g sur $]0; +\infty[$: bijectivité, $\exists! \alpha \in]1; 2[; g(\alpha) = 0$, $(g^{-1})'(0) = \frac{3\alpha^4}{1 + 3\alpha^4}$.
- 5) Suite (u_n) , suites adjacentes, convergence vers λ_0 .

Exercice 35

I/ $g(x) = \tan(x)/x$ sur $[0; \pi/2[$, $g(0) = 1$: continuité, TAF, dérivabilité à droite en 0, bijectivité.

II/ $f(x) = \arctan(g(x))$: continuité, dérivabilité aux deux bornes, tableau, courbe.

Exercice 36

$$f(x) = \arctan(1/x) + \sqrt{\pi \arctan x} \text{ pour } x > 0, f(0) = \pi/2.$$

- 1) Continuité. Limite en $+\infty$. Dérivabilité à droite en 0. Tableau.
- 2) Restriction g sur $[1; +\infty[$: bijectivité, g^{-1} .

Exercice 37

I/ $f(x) = 3\sqrt[3]{x+1} - x$: tableau, unique $\alpha \in]5; 6[$ avec $f(\alpha) = 0$.

II/ Restriction g : unique $\lambda_0 \in]2; 3[$, $(g^{-1})'(\lambda_0)$, TAF.

III/ Suite (u_n) avec $u_0 = 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$: suites adjacentes $\rightarrow \lambda_0$.

Exercice 38

A) Montrer $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

B) $f(x) = 2 \arctan\left(\frac{1}{2} \tan\left(\frac{2x}{3}\right)\right)$ sur $[0; 3\pi/4[$, $f(3\pi/4) = \pi$: dérivée, $f' = 5/3 - \cos(f)$, TAF, tableau, bijectivité.

Exercice 39

$$f(x) = x^2 \arctan(1/x) \quad (x \neq 0), \quad f(0) = 0.$$

- 1) Parité, continuité, dérivabilité en 0.
- 2) TAF, asymptote $y = x$, croissance sur \mathbb{R}^+ .
- 3) Bijectivité, $(f^{-1})'(\pi/4)$.
- 4) Suite (a_n) définie par $f(a_n) = 1/n$: monotonie, convergence.

Exercice 40

$$f(x) = 2 \left(\frac{1}{1 - \sin x} - 1 \right) \text{ sur } [0; \pi/2[.$$

- 1) Bijectivité sur $[0; +\infty[$, $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}$.
- 2) Suite (u_n) , $u_0 = 2$, $u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$: $u_n \rightarrow 0$.
- 3) Suite (v_n) : $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 1/2$.

Exercice 41

$$f(x) = \frac{\arctan(\sqrt{1-x})}{\sqrt{1-x}} \text{ pour } x < 1, \quad f(1) = 1.$$

- 1) Continuité, limite en $-\infty$.
- 2) Encadrement de $(f(x) - f(1))/(x - 1)$, déduire $f'_-(1) = 1/3$.
- 3) $f'(x) = \frac{1}{2(1-x)} \left(f(x) - \frac{1}{2-x} \right)$, monotonie, courbe.
- 4) $|f'(x)| \leq 1/2$, Lipschitz : $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$.