

Exercices d'application

Continuité des fonctions numériques

Limites, prolongements par continuité, théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{1 - \sqrt{3x-5}}$
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} (\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1})$
5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x$
6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x\sqrt{x^2 + x} - 2x^2 - x}{2\sqrt{x^2 + 1}}$

Exercice 2

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 - 3 & \text{si } x \leq 1 \\ ax + b & \text{si } 1 < x < 2 \\ \frac{ax^2 + 2}{3x - 1} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Déterminer les nombres réels a et b pour que f soit continue sur \mathbb{R} .

Exercice 3

Soit f la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{2 + \cos x} - \sqrt{3}}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = -\frac{\sqrt{3}}{12} \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en $x_0 = 0$.
2. a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : |f(x)| \leq \frac{2\sqrt{3}}{x^2}$.
- b) En déduire $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x)$.

Exercice 4

Soit f la fonction numérique définie sur $]-\frac{\pi}{2}; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1 - \cos^3 x}{x \cdot \sin x \cdot \cos x} & \text{si } x \in]-\frac{\pi}{2}; 0[\\ f(x) = \frac{3\sqrt{1+x^2} - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} & \text{si } x \in [0; +\infty[\end{cases}$$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} f(x)$.
2. Étudier la continuité de f au point $x_0 = 0$.

Exercice 5

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = 2x + \frac{x^2 - 5x + 6}{|x^2 - 9| - |x - 3|}$$

1. Déterminer D_f , l'ensemble de définition de f .
2. La fonction f admet-elle un prolongement par continuité au point $x_0 = 3$?

Exercice 6

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{(1 - \tan x)^2}{1 + \cos(4x)}$$

1. Déterminer D_f , l'ensemble de définition de f .

2. a) Soit $h \in]0; \frac{\pi}{2}[- \left\{ \frac{\pi}{4} \right\}$. Montrer que :

$$f\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = \frac{2 \tan^2 h}{(1 - \tan h)^2 \cdot \sin^2(2h)}$$

- b) Montrer que f admet un prolongement par continuité au point $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 7

Soit f la fonction numérique définie sur \mathbb{R}^* par :

$$f(x) = \frac{\cos x - \sqrt{1 + \frac{\sin x}{2}}}{x}$$

Montrer que f est prolongeable par continuité au point $x_0 = 0$.

Exercice 8

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi\}$ par :

$$f(x) = \frac{x \cdot \sin x - \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{x - \pi}$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Montrer que :

$$f(x + \pi) = -\sin x - \pi \cdot \frac{\sin x}{x} + \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$$

2. Montrer que f est prolongeable par continuité au point $x_0 = \pi$.

Exercice 9

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{\tan(\pi x)}{x - E(x)}$$

1. Déterminer D_f , l'ensemble de définition de f .

2. Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2}}} f(x)$.

3. La fonction f admet-elle un prolongement par continuité au point $x_0 = 0$?

Exercice 10

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$$

1. a) Déterminer D_f , l'ensemble de définition de f .
b) Étudier la parité de f .
2. Montrer que : $(\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[); 0 < f(x) < \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.
3. Montrer que f admet un prolongement par continuité au point $x_0 = 0$.

Exercice 11

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\sin(\pi x)}{x}\right)$
2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan\left(\sqrt{x} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x\right)$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{\tan^2 x - \pi \tan x}{2x}\right)$

Exercice 12

1. Soit f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = 1 - xE\left(\frac{1}{x}\right)$.

Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : |f(x)| < |x|$, et en déduire que f est prolongeable par continuité en $x_0 = 0$.

2. Soit g définie sur \mathbb{R}^* par $g(x) = (\sin x) E\left(\frac{1}{x}\right)$.

a) Montrer que :

$$(\forall x \in]0; \pi[) ; \frac{\sin x}{x} - \sin x < g(x) \leq \frac{\sin x}{x}$$

et

$$(\forall x \in]-\pi; 0[) ; \frac{\sin x}{x} \leq g(x) < \frac{\sin x}{x} - \sin x$$

b) La fonction g admet-elle un prolongement par continuité en $x_0 = 0$?

3. Soit h définie sur \mathbb{R}^* par $h(x) = \frac{x - E(x)}{\sqrt{|x|}}$.

La fonction h admet-elle un prolongement par continuité en $x_0 = 0$?

Exercice 13

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \sqrt{|x| - E(x)} - x$.

1. a) Déterminer D_f .

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2. Soit k un entier relatif.

a) Étudier la continuité de f à gauche et à droite en $x_0 = k$.

b) Étudier la continuité de f sur $]k; k + 1[$.

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = x \cdot \sqrt{1 + \left(1 + E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; \sqrt{1 + x^2} < f(x) \leq \sqrt{x^2 + (x + 1)^2}$.

b) En déduire que f est continue à droite en $x_0 = 0$.

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3. a) Montrer que : $(\forall x \in [-1; 0[) ; -\sqrt{1 + x^2} < f(x) \leq -\sqrt{x^2 + (x + 1)^2}$.

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

4. La fonction f est-elle continue en $x_0 = 0$?

Exercice 15

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{1}{E\left(\frac{2}{x}\right) - 1}$.

1. Déterminer D_f .

2. a) Montrer que : $(\forall x \in D_f) ; \frac{2 - 2x}{x} < E\left(\frac{2}{x}\right) - 1 \leq \frac{2 - x}{x}$.

b) En déduire que f admet un prolongement par continuité en $x_0 = 0$.

Exercice 16

1. Montrer que $\sqrt{x} - x^3 + 2x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans $]0; 1[$.
2. Montrer que $\sin x = 1 - x$ admet une solution unique dans $]0; \frac{\pi}{6}[$.
3. Montrer que la courbe de $f(x) = x^5 + 3x^3 + 4x - 5$ coupe l'axe des abscisses en un unique point d'abscisse a avec $0 < a < 1$.

Exercice 17

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ et f continue sur $[0; 1]$ avec $f(0) \neq f(1)$.
Montrer que : $(\exists x_0 \in]0; 1[) ; \alpha f(0) + \beta f(1) = (\alpha + \beta) f(x_0)$.

Exercice 18

Soit f une fonction numérique définie de \mathbb{R} vers $] - \infty; 1[$ et g définie de \mathbb{R} vers $]1; +\infty[$ telles que f et g sont continues sur \mathbb{R} , et il existe $x_1 < x_2$ dans \mathbb{R}_+^* vérifiant $f(x_1) = x_1$ et $g(x_2) = x_2$.

Montrer que : $(\exists x_3 \in]x_1; x_2[) ; (f \times g)(x_3) = x_3$

Exercice 19

Soit f une fonction numérique continue sur $[0; 1]$ telle que $f(0) = f(1)$.
Montrer que : $(\exists c \in [0; \frac{1}{2})) ; f(c + \frac{1}{2}) = f(c)$

Exercice 20

Soit f une fonction définie de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$ et continue sur $[0; 1]$.
Montrer que : $(\exists a \in [0; 1]) ; f(a) + f(1 - a) = 2a$

Exercice 21

Dans chaque question, g est la restriction de f sur I . Montrer que g est bijective de I sur un intervalle J à déterminer, puis calculer $g^{-1}(x)$.

1. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$; $I = [0; 1[$
2. $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$; $I = [-1; 1]$
3. $f(x) = (x + 1)\sqrt{x + 1} - 1$; $I = [-1; +\infty[$

$$4. f(x) = \sqrt{x+1} - 3; \quad I = [-1; +\infty[$$

$$5. f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1; \quad I = \mathbb{R}$$

Exercice 22

Résoudre dans \mathbb{R} :

$$1. \sqrt{1-x} = 1-x$$

$$2. x + \sqrt{x} = 2$$

$$3. \sqrt{x} + \sqrt{\sqrt{x}} = 12$$

$$4. \sqrt{x+7} + \sqrt{28-x} = 5$$

$$5. \sqrt{\frac{2-x}{3+x}} + \sqrt{\frac{3+x}{2-x}} = 2$$

$$6. 4x - 3\sqrt{x} - 1 = 0$$

Exercice 23

Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2} - x}{x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4x+4} - 2}{\sqrt{x} - 1}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{1 - \sqrt{x+1}}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1}}{x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3-x} - 1}{2 - \sqrt{x+6}}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \left(\sqrt{x^2+x^2} - \sqrt{x^3+1} \right)$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1 + \sqrt{(x-1)^5}}{\sqrt{x^2} - 1}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+5}}{1 - \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2(1 - \sqrt{x})} - \frac{1}{3(1 - \sqrt[3]{x})}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt[3]{\cos x}}{x}$$

$$12. \lim_{\substack{x \rightarrow 8 \\ x < 8}} \frac{(4 - x^{1/3})^{3/2}}{x - 8}$$

Exercice 24

Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x + \sqrt[3]{x^2}}{x} \right)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x-1})$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x - \sqrt{1-x})$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^3 + x^2 + 1} - x)$$

$$6. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^3 + x^2 + 1} - 2x)$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{1/2} - x^{1/3})$$

$$8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^{1/2} - 2}{x^3 - 3x^{1/2} + 2}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/2}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$$

$$10. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1-x^3} - \sqrt{x^4-1})$$

$$11. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2+x})$$

$$12. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3-x^2} - \sqrt{x^2-1})$$

$$13. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x) - \cos(2x)}{\sqrt{x}}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan(1/x)}{\sqrt[4]{(1+8x)/x^4}}$$

Exercice 25

Soit $f(x) = \sqrt{x(x-1)^2} - 1$.

1. Déterminer D_f .
2. Calculer : a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$
3. Soit g la restriction de f sur $I = [1; +\infty[$.
 - a) Montrer que g est bijective de I sur un intervalle J à déterminer.
 - b) Montrer que $(\forall x \in [1; +\infty[); g(x) < x$.

Exercice 26

Soit $f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{2-x}$.

1. a) Déterminer D_f . b) Montrer que f est bijective de D_f sur un intervalle J .
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.
3. Résoudre : $f(x) = \sqrt{2x}$.

Exercice 27

Soit $f(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x}$.

1. a) Déterminer D_f . b) Montrer que f est continue sur D_f . c) Montrer que f est bijective de D_f sur un intervalle J .
2. Montrer que $(\exists c \in]0; \frac{1}{2}[); f(c) = c^3$.
3. Résoudre : $f(x) = \sqrt{1-2x}$.
4. Calculer $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x - \frac{1}{2}}$.

Exercice 28

1. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, puis en déduire $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
2. Déterminer $\sin(2 \arctan x)$ et $\cos^2(\frac{1}{2} \arctan x)$.
3. Montrer que $\cos^2(\frac{1}{2} \arctan(x) + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} - \frac{1+x\sqrt{3}}{4\sqrt{1+x^2}}$.

Exercice 29

Simplifier : $A(x) = \tan(2 \arctan x)$, $B(x) = \cos(4 \arctan x)$, $C(x) = \cos(6 \arctan x)$, $D(x) = \sin(3 \arctan x)$.

Formules : $\cos(3\alpha) = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$; $\sin(3\alpha) = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$.

Exercice 30

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan \sqrt{\frac{x-1}{x}}$
2. $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \arctan\left(\frac{1}{x-2}\right)$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(5x^3 + x + 1)}{x}$
4. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \arctan(\tan x)$
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan\left(\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+4}-3}\right)$
6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^3}}\right)$

Exercices de synthèse

Exercice 31 — \arctan — identités, limites, équation

- Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.
 - En déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}_-^*) ; \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$.
- Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$.
- Calculer :
 - $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\arctan(x^2 - x)}{x}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan(\sqrt{x^2 + x})}{\sqrt{x}}$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\arctan(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2} x \right)$
 - $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x\right) - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{x}}$
- Résoudre dans \mathbb{R}^+ : $\arctan x + \arctan(x - 1) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 32 — Point fixe de $f \circ f$

Soit f une fonction numérique définie et continue sur \mathbb{R} telle qu'il existe au moins un réel a vérifiant $(f \circ f)(a) = a$.

Montrer que : $(\exists c \in \mathbb{R}) ; f(c) = c$.

Exercice 33 — Signe constant d'une fonction continue

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de \mathbb{R} telle que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.

Montrer que $(\forall x \in I) ; f(x) > 0$, ou $(\forall x \in I) ; f(x) < 0$.

Exercice 34 — Minoration uniforme sur un segment

1. Soit f continue sur $[a; b]$ avec $f(x) > 0$ pour tout $x \in [a; b]$. Montrer que $(\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*) ; (\forall x \in [a; b]) ; f(x) \geq \alpha$.

2. Soit g continue sur $[a; b]$ avec $g(x) \neq x$ pour tout $x \in [a; b]$. Montrer que $(\exists \beta \in \mathbb{R}_+^*) ; (\forall x \in [a; b]) ; |g(x) - x| \geq \beta$.

Exercice 35 — TVI pour deux fonctions

Soit f et g deux fonctions continues sur $[0; 1]$ telles que $g(0) = f(1)$ et $g(1) = f(0)$.
Montrer que : $(\exists c \in [0; 1]) ; f(c) = g(c)$.

Exercice 36 — Encadrement sur le segment demi-entier

Soit $f(x) = \frac{1}{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{x^2 + 2x} \right) - 1$.

1. Déterminer D_f .
2. Montrer que $(\exists (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2); (\forall x \in [\frac{1}{2}; 1])$:
 $\alpha x \leq \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{x^2 + 2x} \leq \beta x$.
3. Montrer que $(\exists c \in [\frac{1}{2}; 1]) ; \sqrt{1 + \frac{1}{c}} - \sqrt{c^2 + 2c} = c$.

Exercice 37 — Étude de $f(x) = 2x^3 + x - 1$

1. a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J à déterminer.
 b) Déduire la monotonie de f^{-1} sur J .
2. a) Montrer que $f(x) = 0$ admet une solution unique α avec $0 < \alpha < 1$.
 b) Calculer $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sqrt{f(x)}}{x - \alpha}$.

Exercice 38 — Étude de $f(x) = \arctan \sqrt{3 - x}$

Soit f définie sur $] - \infty; 3]$ par $f(x) = \arctan \sqrt{3 - x}$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x - 3}$.
2. Montrer que f est bijective de $] - \infty; 3]$ sur J à déterminer.
3. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
4. Montrer qu'il existe $\alpha \in]2; 3[$ tel que $f(\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{4}$.

Exercice 39 — Simplification avec arctan

Déterminer D_f puis simplifier :

1. $f(x) = \arctan \left(\frac{x^2 - 1}{2x} \right)$
2. $f(x) = \arctan \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$

$$3. f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$4. f(x) = \arctan\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$$

$$5. f(x) = \arctan(\sqrt{1+x^2}-x)$$

$$6. f(x) = \arctan\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$$

Exercice 40 — Bijectivité et $f^{-1} = \arctan$

1. Soit $g(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ sur $[0; +\infty[$.

a) Montrer que g est une bijection de $[0; +\infty[$ sur $] -1; 1]$.

b) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in] -1; 1]$.

2. Soit $f(x) = \arctan\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ sur $[0; +\infty[$.

a) Montrer que f est une bijection de $[0; +\infty[$ sur J à déterminer.

b) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$.